

体積力法による軸対称体の曲げ応力集中の解析*

(第3報, V形およびU形切欠きを有する丸棒の曲げ)

村上敬宜**, 野田尚昭***, 西谷弘信**

Yukitaka MURAKAMI, Nao-aki NODA, Hironobu NISITANI

Key Words: Elasticity, Stress Concentration, Circumferential Notch, Bending, Neuber's Trigonometric Rule, Body Force Method

1. 緒 言

円周切欠きを有する丸棒の応力集中問題は直接設計に用いられる場合のほか、金属の疲労強度の研究に古くから用いられている回転曲げ疲労試験においても重要である。厳密な解析が困難であるため、これまでノイバーの三角則⁽¹⁾による近似値か、それを基に作成された Peterson⁽²⁾ や西田⁽³⁾ の応力集中線図が設計や研究によく用いられてきた。しかし最近では実験⁽⁴⁾ や有限要素法による計算⁽⁵⁾⁽⁶⁾ からノイバーの三角則に存在する誤差が指摘されており、強度研究上の必要性からも正確な応力解析が期待されている⁽⁷⁾。有限要素法などが各種の形状について系統的に精度の良い値を計算するのに不向きであることは第2報⁽¹¹⁾ で述べたとおりである。

著者らは第1報⁽¹⁰⁾ でこれまで主として二次元問題や軸対称問題の解析に用いられてきた体積力法⁽⁸⁾⁽⁹⁾ を軸対称体の曲げ問題に適用するための基礎理論を提案した。また第2報⁽¹¹⁾ では基礎理論を半だ円形円周切欠きを有する丸棒の曲げ問題へ応用し、切欠き深さと切欠き半径について系統的に応力集中の値を計算した。その結果、ノイバーの三角則による値には切欠き深さの広範囲にわたって危険側の誤差(半だ円形切欠きの場合最大6%程度)が存在することを明らかにした。また切欠き効果に関する過去の実験における不合理な点を矛盾なく説明した。

本研究ではさらに具体的に実際の軸形状や試験片形状についての応力状態を明らかにするため、しばしば用いられる 60° V 形切欠きを有する丸棒(図1)を中心に解析を行う。また、切欠きの開き角 ω の変化が応力集中係数および応力分布へ及ぼす影響についても考察する。切欠き効果(または寸法効果)には切欠き

底の最大応力のみでなく応力分布も重要な役割をもっており、両者をあわせて考慮する立場はき裂問題において応力拡大係数に注目することに通じる⁽¹²⁾。

本研究で扱うような実際に用いられる形状の問題について応力集中係数を精度良く計算することは、これ

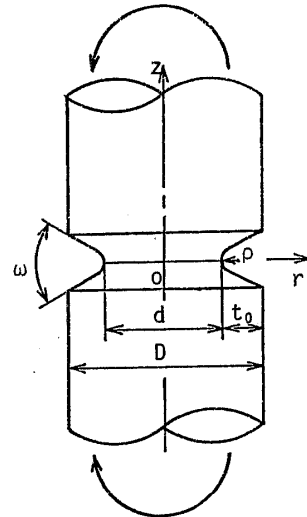


図1 V形切欠きを有する丸棒の曲げ
($\omega=0$ の場合は U 形切欠き)

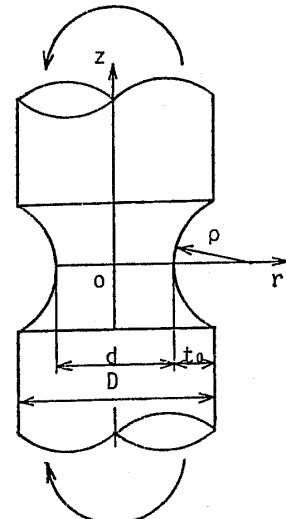


図2 円弧形切欠きを有する丸棒の曲げ

* 昭和56年10月20日 第59期全国大会講演会において論文講演として講演, 原稿受付 昭和56年4月2日。

** 正員, 九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎町 6-10-1)。

*** 准員, 九州大学大学院。

までの解析に比べてさらに困難になるが、本研究の方法によればいったん解析方法が確立すると各種の寸法を変えて系統的な値を得るのが可能である。なおV形切欠きで切欠き半径 ρ が切欠き深さ h_0 に比べて大きい場合には、切欠き側面の直線部のない円弧形切欠き(図2)となるが、本研究ではこの場合についても解析し応力集中係数の値を得た。

2. 計算方法の概略

体積力法を軸対称体の曲げ問題へ適用する基礎理論

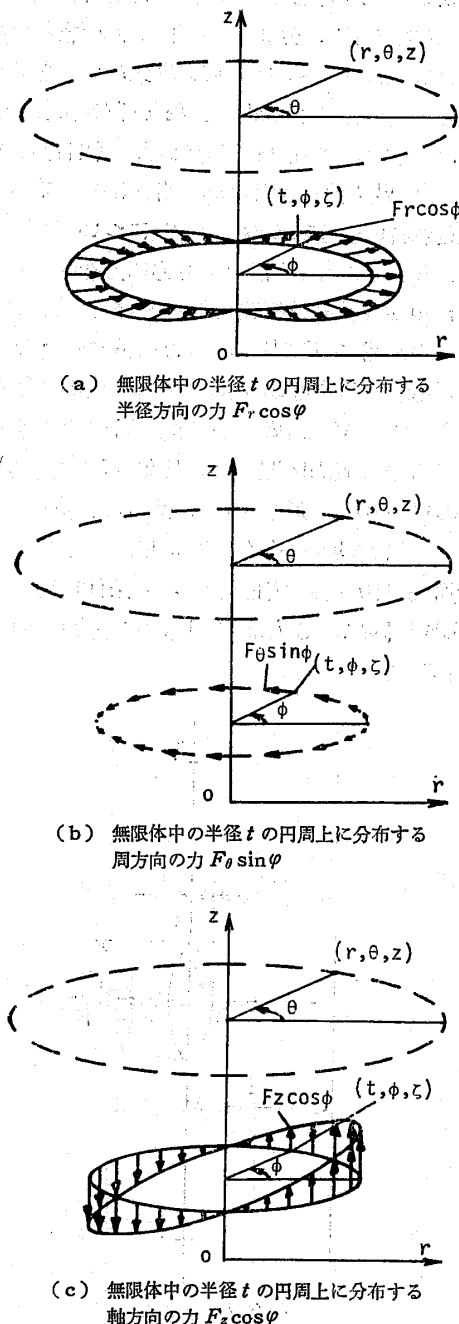


図3 軸対称体の曲げ問題における3種類の基本解

については第1報⁽¹⁰⁾で詳しく説明した。本報でも第1報で示した基礎理論に基づきV形切欠きの解析を行う。解析に用いる基本解は無限体中の一つの円周上に作用する図3に示すような3形式の分布力による応力場である。これらの分布力を無限体中に想定したV形切欠きおよび丸棒円筒面となるべき境界上に連続的に作用させ、その基本解の強さ(すなわち体積力の密度)を調節することによって境界条件を満たす。3種類の基本解の応力場の性質から問題を対称軸を含む一つの縦断面についてのみ注目して二次元問題と同様に扱うことができる。3種類の基本解による応力の式 σ^{Fr*} , $\sigma^{F\theta*}$, σ^{Fz*} , (単に σ と書くのは σ_r , σ_θ , σ_z , τ_{rz} , $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$ の各応力を指すことにする)は第1報⁽¹⁰⁾の式(5)~(8)で与えているので本報では省略する。

3. 境界条件と体積力の密度の定義

図1のような丸棒の満足すべき境界条件は式(1)で表される。

- (i) 切欠き先端の円弧部 (n : 法線方向, t : 接線方向, θ : 円周方向):

$$\sigma_n = \tau_{nt} = \tau_{n\theta} = 0$$
 - (ii) 切欠きの直線部:

$$\sigma_n = \tau_{nt} = \tau_{n\theta} = 0$$
 - (iii) 丸棒の円筒面 $r = D/2$, $b \leq |z| \leq \infty$:

$$\sigma_r = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0$$
 - (iv) 遠方での曲げ応力 $0 \leq r \leq D/2$, $|z| = \infty$:

$$\sigma_z = \sigma_0 \frac{2r}{d} \cos \theta \quad (\text{他の応力は零})$$
-(1)

ここで σ_0 は曲げモーメントの大きさを表す定数で、曲げモーメントは軸に垂直な断面の $\theta = \pi/2$ の直線まわりに作用するとした。また σ_n , τ_{nt} , $\tau_{n\theta}$ は切欠き先端の円弧部と切欠き側面の直線部における法線方向の垂直応力、子午線方向のせん断応力、円周方向のせん断応力であって式(2)で表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_r \cos^2 \phi_1 + \sigma_z \sin^2 \phi_1 \\ &\quad + 2\tau_{rz} \sin \phi_1 \cos \phi_1 \\ \tau_{nt} &= (-\sigma_r + \sigma_z) \sin \phi_1 \cos \phi_1 \\ &\quad + \tau_{rz} (\cos^2 \phi_1 - \sin^2 \phi_1) \\ \tau_{n\theta} &= \tau_{r\theta} \cos \phi_1 + \tau_{\theta z} \sin \phi_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

ここで ϕ_1 は面の法線と r 軸とのなす角度である。

切欠き部および丸棒円筒面となるべき境界上に分布する体積力の密度を次のように定義する。半径 t , 面積 $td\phi ds$ ($ds = \sqrt{(dt)^2 + (d\zeta)^2}$) の帯状の微小要素に働く体積力の合力の成分を dF_r , dF_θ , dF_z とすると

各方向の密度 ρ_r , ρ_θ , ρ_z は式 (3) のように表される [(t, φ, ζ) は着力点の円筒座標である].

切欠き先端の円弧部:

$$\rho_r \cos \varphi = \frac{dF_r}{td\zeta d\varphi}, \quad \rho_\theta \sin \varphi = \frac{dF_\theta}{tdsd\varphi}, \quad \rho_z \cos \varphi = \frac{2t}{d} \frac{dF_z}{tdtd\varphi}$$

切欠きの直線部:

$$\rho_r \cos \varphi = \frac{dF_r}{tdsd\varphi}, \quad \rho_\theta \sin \varphi = \frac{dF_\theta}{tdsd\varphi}, \quad \rho_z \cos \varphi = \frac{2t}{d} \frac{dF_z}{tdsd\varphi}$$

丸棒の円筒面:

$$\rho_r \cos \varphi = \frac{dF_r}{td\zeta d\varphi}, \quad \rho_\theta \sin \varphi = \frac{dF_\theta}{td\zeta d\varphi}, \quad \rho_z \cos \varphi = \frac{dF_z}{td\zeta d\varphi}$$

切欠き部の ρ_z については特に、打ち消すべき曲げ応力 $\sigma_z = \sigma_0(2r/d) \cos \theta$ に対応して式 (3) のような定義にすると精度向上のため都合が良い。また、切欠き円弧部の ρ_r と切欠き直線部の ρ_r の定義を変えてあるのは、U 形切欠きの場合直線部で $d\zeta=0$ となるためである。

4. 数値計算の具体的方法

図 4 に無限体中に想定した V 形切欠きおよび丸棒円筒面となるべき境界面を示す。これら境界上に図 3 に示した 3 種類の分布力を連続的に作用させる。切欠き部においては、切欠きとなるべき境界 BAB' のほかに外側の BA'B' にも同じ密度の体積力を分布させることが本解法において重要である。このようにすれば丸棒円筒面で打ち消すべきせん断応力をあらかじめ小さくしておくことができる。丸棒の形状は切欠き半径 ρ , 切欠き深さ t_0 , 開き角 ω , 外径 D を与えることによって決定されるが, $r_f = \rho \sin(\omega/2) + t_0 - \rho \leq 0$

の場合には円弧形切欠き (図 2) となる。この場合にも図 5 に示すように境界 BA'B' にも体積力を分布させることが重要である。分布すべき体積力の密度は閉じた形では求まらないので、切欠き先端の円弧部 AE を n_1 分割、切欠き側面 EB を n_2 分割、丸棒円筒面 BC を n_3 分割する。分割した各区間の注目点 (区間の中点) で境界条件を満たすよう各区間に分布する体積力の密度を決定する。平面 $z=0$ についての対称性から、この面について体積力を対称に分布すれば境界条件は $z>0$ の範囲で満たせばよい。分割した区間を A の側から順番に E→B→C の方へ番号をつける。このとき対応する AB', A'B, A'B' の範囲でもそれぞれ A および A' の側から対応する番号をつける。ここで j 番めの着力区間とは、切欠き部では AB, AB', A'B, A'B' の対応する j 番めの区間を指し、丸棒円筒面では BC, B'C' 間の対応する j 番めの区間を指す。また i 番めの注目点 (境界条件を満たす点) とは AEBC 間にある i 番めの区間の中点を指すことと約束する。

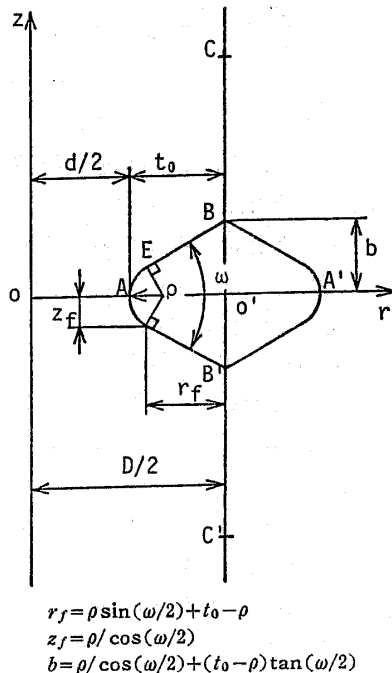


図 4 無限体中に想定した体積力を分布させる境界 (V 形切欠きの場合)

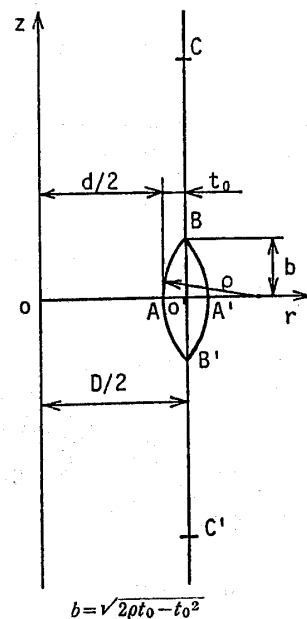


図 5 無限体中に想定した体積力を分布させる境界 (円弧形切欠きの場合)

切欠き先端の円弧部と切欠きの直線部はそれぞれ区間 AE および区間 EB を等分割した。一方、丸棒円筒面においては第 2 報⁽¹¹⁾と同様に切欠きに近いところでは細かい分割にして、切欠きから離れるにつれて分割を粗くした。軸方向の長さ $O'C$ は最低の場合で外径 D の 2 倍程度である。

j 番めの区間に単位密度の体積力を分布させたときの i 番めの区間の注目点における応力 $\sigma_{ij}^{\rho r}$, $\sigma_{ij}^{\rho \theta}$, $\sigma_{ij}^{\rho z}$ (影響係数) は、図 3 に示すような基本解の応力の式 σ^{F_r*} , $\sigma^{F_\theta*}$, σ^{F_z*} を積分することによって求まる。それは第 1 報の式 (5)~(8) で与えられる。切欠き先端の円弧部では切欠きの形状を式 (4) で表現する変数 ψ について積分する。

$$r = \rho \cos \psi + D/2 - t_0 + \rho, \quad z = \rho \sin \psi \quad \dots\dots\dots (4)$$

円弧部では $d\zeta = t' d\psi$, $dt = \zeta d\psi [t' = t - D/2 \pm (t_0 - \rho)]$ であるから、影響係数は式 (5) のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^{\rho r} &= \int_{\psi_{j1}}^{\psi_{j2}} \sigma^{F_r*} t' d\psi, & \sigma_{ij}^{\rho \theta} &= \int_{\psi_{j1}}^{\psi_{j2}} \sigma^{F_\theta*} \sqrt{t'^2 + \zeta^2} d\psi, & \sigma_{ij}^{\rho z} &= \int_{\psi_{j1}}^{\psi_{j2}} \sigma^{F_z*} \frac{2t}{d} \zeta d\psi \quad (j=1 \sim n_1) \\ \sigma_{ij}^{\rho r} &= \int_{s_{j1}}^{s_{j2}} \sigma^{F_r*} ds, & \sigma_{ij}^{\rho \theta} &= \int_{s_{j1}}^{s_{j2}} \sigma^{F_\theta*} ds, & \sigma_{ij}^{\rho z} &= \int_{s_{j1}}^{s_{j2}} \sigma^{F_z*} \frac{2t}{d} ds \quad (j=n_1+1 \sim n_1+n_2) \\ \sigma_{ij}^{\rho r} &= \int_{z_{j1}}^{z_{j2}} \sigma^{F_r*} d\zeta, & \sigma_{ij}^{\rho \theta} &= \int_{z_{j1}}^{z_{j2}} \sigma^{F_\theta*} d\zeta, & \sigma_{ij}^{\rho z} &= \int_{z_{j1}}^{z_{j2}} \sigma^{F_z*} d\zeta \quad (j=n_1+n_2+1 \sim n_1+n_2+n_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで $(\psi_{j1} \sim \psi_{j2})$, $(s_{j1} \sim s_{j2})$, $(z_{j1} \sim z_{j2})$ はそれぞれ切欠き先端の円弧部、切欠きの直線部、丸棒の円筒面における j 番め区間の範囲を示す。式 (5) の積分は閉じた形では求めることができないのでシンプソンの公式によって数値積分する。 i 番めの注目点における影響は、その位置を示す座標を式 (5) に代入すればよい。切欠き部 ($i=1 \sim n_1+n_2$) の境界条件の表現には式 (5) で決定した応力を式 (2) によって変換し、 $\sigma_{nij}^{\rho r}$, $\tau_{ntij}^{\rho r}$, $\tau_{n\theta ij}^{\rho r}$, ..., $\tau_{n\theta ij}^{\rho z}$ を求めておく必要がある。 j 番めの区間に分布する体積力の密度 ρ_{nj} , $\rho_{\theta j}$, ρ_{zj} は式 (6) の $3(n_1+n_2+n_3)$ 元連立方程式を解くことによって得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_1+n_2+n_3} (\rho_{rj} \sigma_{nij}^{\rho r} + \rho_{\theta j} \sigma_{nij}^{\rho \theta} + \rho_{zj} \sigma_{nij}^{\rho z}) + \sigma_0 \frac{2r_i}{d} \sin^2 \phi_i &= 0 \quad (i=1 \sim n_1+n_2) \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2+n_3} (\rho_{rj} \tau_{ntij}^{\rho r} + \rho_{\theta j} \tau_{ntij}^{\rho \theta} + \rho_{zj} \tau_{ntij}^{\rho z}) + \sigma_0 \frac{2r_i}{d} \sin \phi_i \cos \phi_i &= 0 \quad (i=1 \sim n_1+n_2) \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2+n_3} (\rho_{rj} \tau_{n\theta ij}^{\rho r} + \rho_{\theta j} \tau_{n\theta ij}^{\rho \theta} + \rho_{zj} \tau_{n\theta ij}^{\rho z}) &= 0 \quad (i=1 \sim n_1+n_2) \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2+n_3} (\rho_{rj} \sigma_{rij}^{\rho r} + \rho_{\theta j} \sigma_{rij}^{\rho \theta} + \rho_{zj} \sigma_{rij}^{\rho z}) &= 0 \quad (i=n_1+n_2+1 \sim n_1+n_2+n_3) \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2+n_3} (\rho_{rj} \tau_{rzij}^{\rho r} + \rho_{\theta j} \tau_{rzij}^{\rho \theta} + \rho_{zj} \tau_{rzij}^{\rho z}) &= 0 \quad (i=n_1+n_2+1 \sim n_1+n_2+n_3) \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2+n_3} (\rho_{rj} \tau_{r\theta ij}^{\rho r} + \rho_{\theta j} \tau_{r\theta ij}^{\rho \theta} + \rho_{zj} \tau_{r\theta ij}^{\rho z}) &= 0 \quad (i=n_1+n_2+1 \sim n_1+n_2+n_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

式 (6) の第 1 式と第 2 式に含まれる r_i は i 番めの注目点の r 座標である。式 (6) の連立方程式を解いて各区間に分布する体積力の密度が決定されれば、任意の点における応力は決定された体積力の密度と影響係数 [式 (5) において i 番めの注目点の座標のかわりに求める点の座標を代入したもの] との一次結合の形で求めることができる。切欠き底に発生する最大応力を求めるには第 1 報で報告したように切欠き底近傍に分布した体積力の効果を特別に極限操作⁽⁹⁾によって求める。

5. 計算結果と考察

4 章までに示した方法によって計算プログラムを作成した。計算にあたって式 (5) に含まれる積分はシ

ンプソン則に従って数値積分したが、その分割数は一区間で 10 である。注目点と着力区間の番号が一致するとき ($i=j$ のとき) と応力集中部近傍に分布した体積力の最大応力におよぼす効果を求める際には特別に 82 分割した。応力集中係数 K_t は最小断面 (図 4 の OA 間) に生じる応力分布を積分して曲げモーメント M を求め、それに基づく公称応力を基礎にして決めた。最小断面 OA 間の $\theta=0$ の位置における z 方向の垂直応力を $\sigma_z(r)$ とすると、 K_t は式 (7), (8) で与えられる。

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{d/2} \int_0^{\pi/2} \sigma_z(r) r^2 \cos^2 \theta d\theta dr \\ &= \pi \int_0^{d/2} \sigma_z(r) r^2 dr \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}, \quad \sigma_n = \frac{32M}{\pi d^3} \dots\dots\dots (8)$$

式(7)における r に関する積分はシンプソンの式によって計算する。このためOA間を分割し(分割数14~32)各分割点での $\sigma_z(r)$ を求めた。分割は応力集中を考慮して切欠き底の近くでは細かくした。以下の計算ではこのようにして得られた応力集中係数 K_t を切欠き深さ t_0 、切欠き半径 ρ および開き角 ω との関連でまとめている。ポアソン比は0.3とした。

5.1 分割数(n_1, n_2, n_3)の変化による計算結果の変化について 本研究で計算した切欠き形状は開き角 $\omega=0^\circ$ のU形切欠き、側面角 $\omega=60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ のV形切欠き、ならびに円弧形切欠きである。いずれの形状においても有限の分割数(n_1, n_2, n_3)に対する応力集中係数の値から分割数が無限大の場合を外そうすることによって数値を得た。表1に切欠き先端の円弧部の分割数 n_1 、切欠き側面の直線部の分割数 n_2 、丸棒円筒面における分割数 n_3 を変えよときの計算結果の変化の例を示す。表1において ∞_{2-3} などは $n_1=2$ と $n_1=3$ の結果から外そうして得た値であることを意味する。表1に示している各形状においては二つの外そう値の比較から四けた程度の精度があるこ

表1 分割数の変化による計算結果の変化の例

$2\rho/D$	$2t_0/D$	ω	n_1	n_2	n_3	K_t
0.05	0.2	60°	2	8	30	3.206874
			3	12	45	3.200120
			4	16	60	3.196963
			∞_{2-3}			3.187
			∞_{3-4}			3.187
0.05	0.7	60°	5	25	40	2.204895
			6	30	48	2.204856
			7	35	56	2.204774
			∞_{5-6}			2.205
			∞_{6-7}			2.204
0.5	0.5	60°	8	4	24	1.265908
			12	6	36	1.266361
			16	8	48	1.266575
			∞_{8-12}			1.267
			∞_{12-16}			1.267
0.2	0.6	120°	6	30	36	1.492610
			7	35	42	1.492712
			8	40	48	1.492787
			∞_{6-7}			1.493
			∞_{7-8}			1.493
0.2	0.02	(円弧形切欠き)	4	—	24	1.523258
			6	—	36	1.516269
			8	—	48	1.512787
			∞_{4-6}			1.502
			∞_{6-8}			1.502

とがわかる。計算機の容量の制約から分割数(n_1, n_2, n_3)の大きさは制限されるが、以下に示すすべての場合について表1と同様な二つの外そう値の比較による精度の検討を行った。その結果、誤差は最大でも1%以内であると考え、多くの場合四けための値が ± 1 程度変わるかどうかである。

5.2 60° V形切欠きを有する丸棒の応力集中係数

表2は開き角 60° のV形切欠きを有する丸棒の曲げ応力集中の計算結果をまとめたものである。 $t_0 \leq \rho/2$ の場合にはV形ではなく、切欠き側面の直線部のない円弧形切欠き(図2)の計算結果である。参考のため第2報⁽¹⁾で計算した半だ円形円周切欠きを有する丸棒の応力集中係数とノイバーの三角則⁽¹⁾による値も示している。

図6は表2の結果を縦軸に応力集中係数 K_t 、横軸に $2t_0/D$ をとって整理したものである。一点鎖線は半だ円形切欠きの K_t 、破線はノイバーの三角則による K_t である。 60° V形切欠きと半だ円形切欠きの結果を比較すると、切欠き半径の大きいときには両者にあまり差はないが、切欠き半径が小さくなるにつれて 60° V形切欠きについての計算結果の方がしだいに大きくなることわかる。このように ρ の減少とともに両者に差があらわれる理由は、切欠きの形状を具体的に図示して比較すると納得できる。

図7は $t_0/\rho=15$ の場合について 60° V形切欠き、半だ円形切欠き、U形切欠きについての切欠き形状を比較した図である。切欠き底の曲率半径 ρ と切欠き深さ t_0 をそろえても切欠きの先端から少し離れると形状に違いが生じる。つまりだ円形では切欠きの先端のみで曲率半径が ρ であって、先端から離れるにつれて曲率半径は ρ より大きくなるのに対して、V形あるいはU形切欠きでは先端の円弧部のすべての点で曲率半径が ρ である。このような事情で $2\rho/D$ が小さくなると半だ円形切欠きに比べて 60° V形切欠きでは応力集中の値がしだいに大きくなるものと思われる。

ノイバーの三角則による値の誤差は半だ円形切欠きの場合最大6%程度であることは第2報で報告した。しかし半だ円形切欠きとV形切欠きとは切欠きの鋭い場合には上述のような差が生じる。したがってV形切欠きの応力集中係数をノイバーの三角則によって評価する場合さらに大きい誤差が生じることになる。本研究で計算した $2\rho/D \geq 0.03$ の範囲ではノイバーの三角則の誤差は最大9%程度、 $2\rho/D < 0.03$ の場合には9%以上の危険側の誤差が存在する場合がある。図6によればノイバーの三角則による危険側の誤差の存

在範囲はかなり大きなものであることがわかる。図8は表2の結果を縦軸に応力集中係数 K_t 、横軸に $2\rho/D$ をとって整理したもので、図6と合わせて使用すれば

表2に実際に示していない寸法の組合せの形状に対する 60° V形切欠きの応力集中係数を求めることができる。

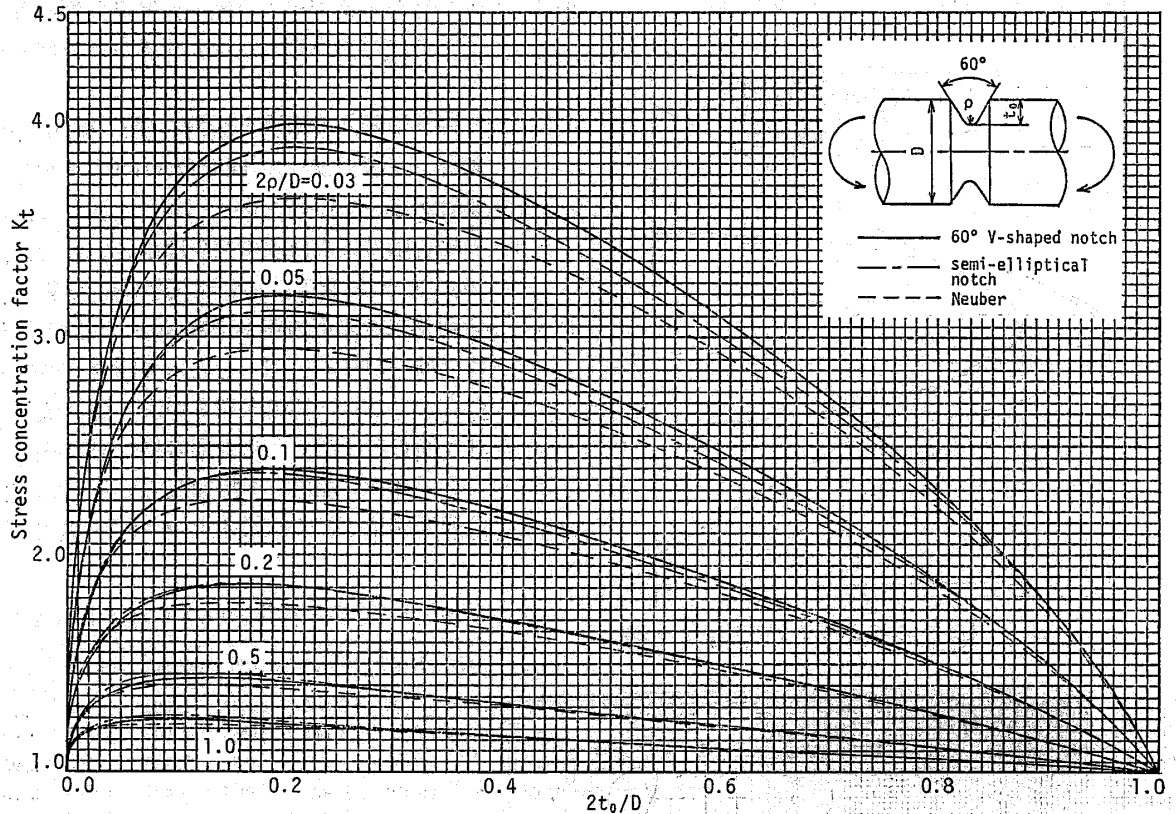


図6 60° V形切欠きを有する丸棒の応力集中係数 K_t ($t_0 \leq \rho/2$ の場合は円弧形切欠きの K_t)

表2 60° V形切欠きを有する丸棒の応力集中係数 K_t ($t_0 \leq \rho/2$ の場合は円弧形切欠きの K_t)

$2t_0/D$	$2\rho/D=0.03$			$2\rho/D=0.05$			$2\rho/D=0.1$		
	60° V	半だ円	ノイバー	60° V	半だ円	ノイバー	60° V	半だ円	ノイバー
0.02	2.49	2.505	2.48	2.120	2.147	2.13	1.753	1.785	1.78
0.05	3.18	3.161	3.06	2.629	2.630	2.56	2.078	2.099	2.05
0.1	3.70	3.633	3.45	3.003	2.974	2.83	2.305	2.306	2.21
0.2	3.98	3.877	3.64	3.187	3.124	2.95	2.396	2.375	2.25
0.3	3.90	3.785	3.58	3.111	3.035	2.88	2.325	2.293	2.19
0.4	3.69	3.571	3.42	2.942	2.868	2.75	2.203	2.164	2.09
0.5	3.42	3.304	3.20	2.724	2.656	2.58	2.049	2.017	1.97
0.6	3.10	3.007	2.93	2.480	2.424	2.37	1.884	1.860	1.83
0.7	2.73	2.667	2.61	2.204	2.168	2.12	1.704	1.692	1.67
0.8	2.30	2.27	2.22	1.884	1.87	1.84	1.501	1.499	1.48
0.9	1.77	1.77	1.73	1.502	1.51	1.48	1.269	1.27	1.26

$2t_0/D$	$2\rho/D=0.2$			$2\rho/D=0.5$			$2\rho/D=1.0$		
	60° V	半だ円	ノイバー	60° V	半だ円	ノイバー	60° V	半だ円	ノイバー
0.02	1.502	1.532	1.53	1.288	1.311	1.31	1.185	1.202	1.19
0.05	1.699	1.728	1.69	1.382	1.407	1.37	1.232	1.250	1.22
0.1	1.827	1.845	1.77	1.428	1.450	1.40	1.246	1.262	1.22
0.2	1.857	1.858	1.77	1.416	1.427	1.38	1.223	1.232	1.21
0.3	1.794	1.786	1.72	1.370	1.375	1.35	1.193	1.198	1.19
0.4	1.703	1.695	1.65	1.318	1.320	1.31	1.165	1.167	1.16
0.5	1.603	1.596	1.57	1.267	1.269	1.26	1.139	1.139	1.14
0.6	1.498	1.494	1.48	1.217	1.218	1.21	1.112	1.112	1.11
0.7	1.388	1.388	1.38	1.165	1.166	1.16	1.085	1.085	1.09
0.8	1.270	1.272	1.26	1.112	1.113	1.11	1.058	1.058	1.06
0.9	1.143	1.14	1.14	1.059	1.058	1.06	1.028	1.028	1.03

5.3 切欠きの開き角の応力集中係数への影響 表3は切欠きの開き角 ω を変えたときの応力集中の変化を示している。表3に示すように ρ および t_0 の8種類の組合せについて開き角 $\omega=0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$

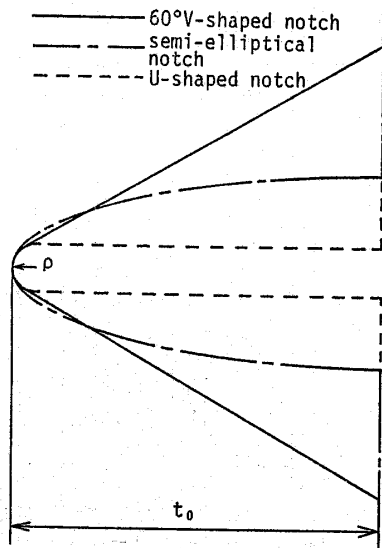


図7 $t_0 \gg \rho$ の場合の切欠き形状の比較

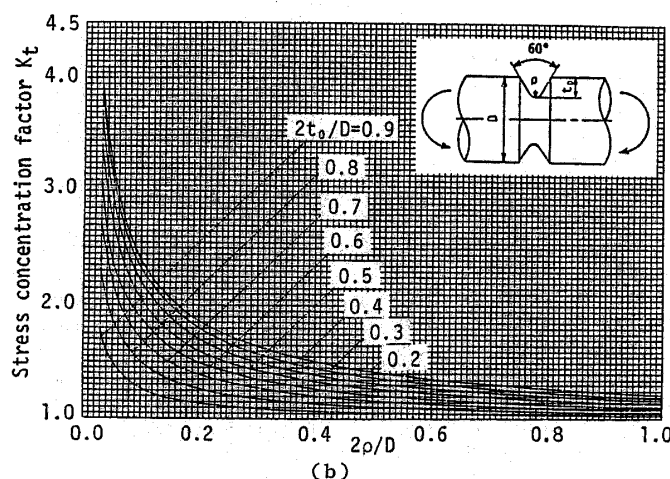
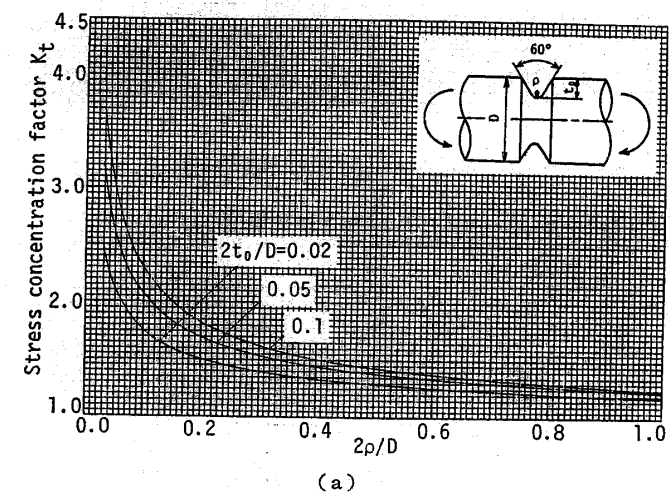


図8 60°V形切欠きを有する丸棒の応力集中係数 K_t

について計算を行った。参考のため半だ円形切欠きの $K_t^{(11)}$ とノイバーの三角則による値 $^{(1)}$ をのせている。 ω の各値に対する K_t と半だ円の K_t との大小関係は、前述の切欠き半径 ρ に関する原因の他境界条件を満たすため分布する集中力の分布場所と方向から理解できる。

図9は表3の結果を縦軸に K_t 、横軸に ω をとって整理した図である。開き角 $\omega=0^\circ$ のU形切欠きの場合から ω を $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ と増しても、ほとんどの場合応力集中係数の減少は小さいことがわかる。図10は ρ と t_0 をそろえた切欠きの応力集中係数 K_t を、U形切欠きの応力集中係数 K_{tU} と比較するため縦軸に $(K_t-1)/(K_{tU}-1)$ をとって開き角の影響を整理したものである。切欠き深さが浅く切欠き半径が大きいくほど開き角を増すときの応力集中係数の変化は小さいようである。菊川らも指摘している $^{(13)}$ ように、実際の機械部品などでは開き角 $\omega=0^\circ \sim 90^\circ$ が普通である

表3 切欠きの開き角の応力集中係数への影響

$2\rho/D$	$2t_0/D$	$\omega=0^\circ$	$\omega=60^\circ$	$\omega=90^\circ$	$\omega=120^\circ$	半だ円	ノイバー
0.05	0.05	2.630	2.629	2.624	2.585	2.630	2.56
0.05	0.1	3.002	3.003	2.989	2.879	2.974	2.83
0.05	0.2	3.203	3.187	3.149	2.963	3.124	2.95
0.05	0.4	2.950	2.942	2.894	2.706	2.868	2.75
0.05	0.6	2.494	2.480	2.453	2.336	2.424	2.37
0.1	0.6	1.890	1.884	1.878	1.842	1.884	1.83
0.2	0.6	1.504	1.498	1.498	1.493	1.494	1.48
0.5	0.6	1.218	1.217	1.216	1.216	1.218	1.21

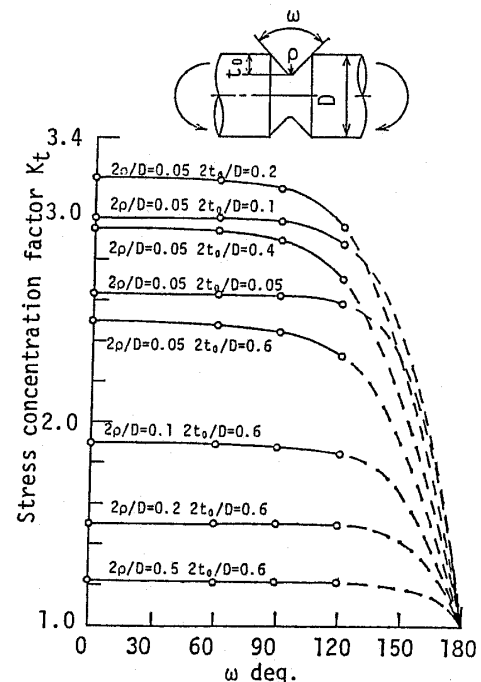


図9 切欠きの開き角の応力集中係数への影響

が、この場合には応力集中係数への開き角の影響は極端に鋭い切欠きを除いてほとんどないと思われる。

5.4 切欠き底近傍の応力分布に及ぼす切欠きの開き角の影響 応力集中係数のほかに切欠き底近傍の応力分布を明らかにすることは回転曲げ疲労強度における切欠き効果と寸法効果の研究に関連して重要である⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾。図 11 は切欠き底近傍の応力分布への開き角の影響を調べたものである。縦軸には軸方向の応力 σ_z を切欠き底の最大応力 $\sigma_{\max}$ で無次元化した値をとり、横軸には切欠き底から内部方向の距離 x を切欠き半径 ρ で無次元化した値をとっている。図に示す 3 種類の ρ と t_0 の組合せについて、開き角 $\omega=0^\circ$ の U 形切欠き、 $\omega=120^\circ$ の V 形切欠き、および半だ円形切欠き⁽¹¹⁾の無次元化応力分布を図示した。図示していないが $\omega=60^\circ, 90^\circ$ の V 形切欠きの応力分布は ω

$=0^\circ$ の場合にほとんど完全に一致する。これらの図から切欠き半径 ρ と切欠き深さ t_0 が一定なら開き角 ω が広範囲 $\omega=0^\circ \sim 120^\circ$ に変化しても、切欠き底近くの応力分布はほとんど変化しないことがわかる。

切欠き底近傍の応力分布への切欠き深さ t_0 の影響

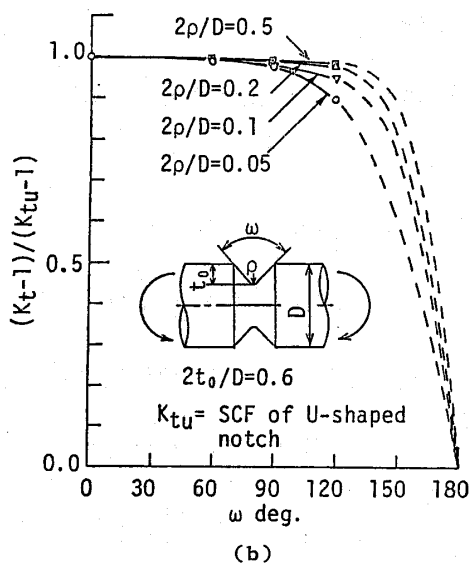
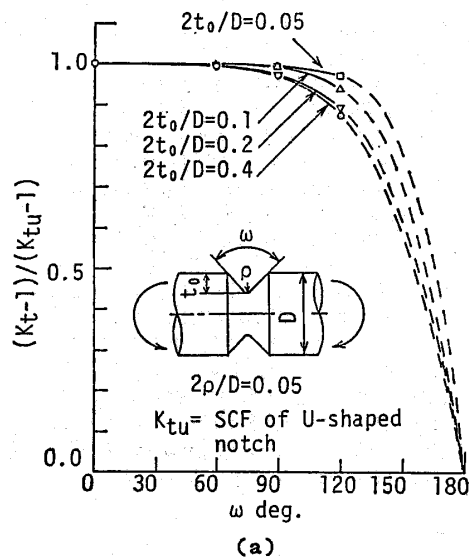


図 10 $(K_t-1)/(K_{tu}-1)$ と ω の関係

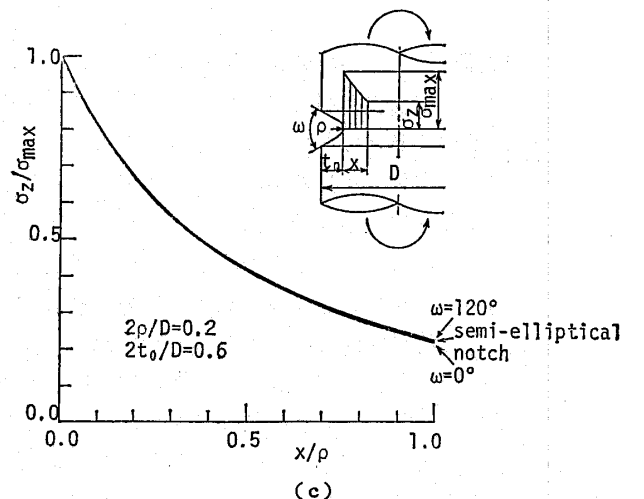
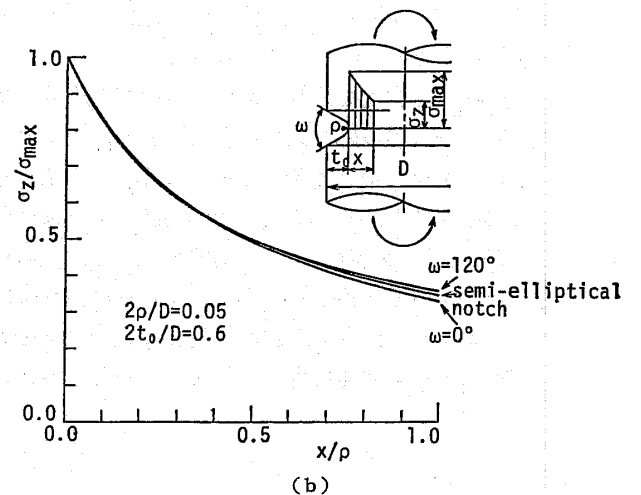
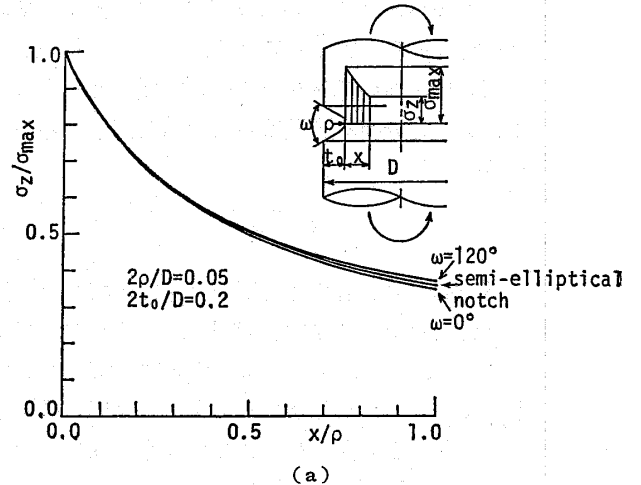


図 11 切欠き底近傍の応力分布に及ぼす切欠きの開き角の影響

についてはすでに第2報で考察した。それによれば切欠き半径 ρ が一定なら深さ h_0 が広範囲に変わっても、やはり無次元応力分布はほとんど一致する。このように ρ によって応力分布がほとんど決定されるということは、材料の疲労限度の寸法効果（または切欠き効果）が主として切欠き半径 ρ の寸法を通じて現れること⁽¹⁵⁾を意味しており極めて重要である。本研究の解析によって、実際の試験片形状として用いられる V 形切欠きにおいて開き角を広い範囲に変えても、やはり ρ が応力分布を支配する決定的な因子であることが確認された。

6. 結 言

円周切欠きを有する丸棒の問題は直接設計に用いられる場合のほか強度研究用の試験片においても重要である。本報では回転曲げ疲労試験においてしばしば用いられる 60° V 形切欠きを有する丸棒の曲げ応力集中問題を中心に扱った。また切欠きの開き角の影響についても 0°, 90°, 120° の場合を考察した。計算方法としては第1報⁽¹⁰⁾で確立した体積法法を利用した。結論をまとめると次のようになる。

(1) 寸法比を系統的に変化させて 60° V 形切欠きを有する丸棒の応力集中係数を計算した。それによれば、ノイバーの三角則⁽¹⁾を用いて 60° V 形切欠きの応力集中係数を評価すると、 $2\rho/D \geq 0.03$ の範囲で最大 9% 程度、 $2\rho/D < 0.03$ の範囲では 9% 以上の危険側の誤差を生じる場合がある。ノイバーの三角則におけるこのような大きい誤差は、実際に疲労強度の考察に無視できない問題を生じる。また、その誤差は切欠き

深さの広い範囲にわたって存在する。なお本研究の計算結果の誤差は最大で 1% 以内、多くの場合 0.1% 以内である（四けためが ± 1 程度変わる程度）。

(2) 得られた計算結果から設計や研究用として 60° V 形切欠き（切欠きの浅い場合は円弧形切欠き）の曲げ応力集中線図を作成した。

(3) 切欠き開き角の応力集中係数への影響を考察した結果、開き角 $\omega = 0^\circ \sim 90^\circ$ の範囲では極端に鋭い切欠きの場合を除き応力集中係数への開き角の影響はほとんど無視できる程度である。

(4) 切欠きの開き角の切欠き底近傍の応力分布への影響を考察した結果、切欠き半径 ρ は開き角 ω の広い範囲の変化 ($\omega = 0^\circ \sim 120^\circ$) にかかわらず、応力分布を支配する決定的な因子であることが明らかになった。

文 献

- (1) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, (1957), Springer-Verlag.
- (2) Peterson, R. E., *Stress Concentration Design Factors*, (1962), John-Wiley & Sons.
- (3) 西田, 応力集中, (昭 48), 森北出版.
- (4) 菊川・佐藤, 機論, 38-311 (昭 47), 1663.
- (5) 宮本, 精密機械, 35-10 (昭 44), 609.
- (6) 佐藤・ほか 2 名, 機論, 42-364 (昭 51), 3701.
- (7) 宮本, 三次元弾性論, (昭 42), 10, 裳華房.
- (8) 西谷, 機誌, 70-580 (昭 42), 627.
- (9) Nisitani, H. (Sin, G. C. 編), *Mechanics of fracture* 5, (1978), Noordhoff Int. Pub.
- (10) 村上・ほか 2 名, 機論, 48-427, A (昭 57), 43.
- (11) 村上・ほか 2 名, 文献 (10) の 54 ページ.
- (12) 西谷・村上, 機誌, 75-642 (昭 47), 1081.
- (13) 菊川・佐藤, 文献 (6) の 1681 ページ.
- (14) Siebel, E. and Stieler, M., *VDI-Z*, 97-5 (1955), 121.
- (15) 西谷, 機論, 34-259 (昭 43), 371.

討 論

〔質問〕 長谷川久夫 (明治大学工学部)

(1) 本論文で引用されておられるノイバーの結果は、切欠き形状はどのようなときのものか。

(2) 文献 (4) の第2報と第3報に V 形切欠きをもつ丸棒の曲げ問題のひずみゲージによる測定値が示されているが、それらの結果と比較はできないか。

(3) $i=j$ のときに 82 分割して数値積分する際、基本解の特異性はどのようにして避けたのか。

〔回答〕 (1) 本論文での議論に用いたノイバーの結果は、浅い切欠きの応力集中係数 K_{tf} として引張りを受ける無限板中の円孔の解を、深い切欠きの応力集中係数 K_{tt} として曲げモーメントを受ける回転双曲面切欠きの解を用いて、いわゆるノイバーの三角公

式 [式 (iv)] から求めたものである。

$$K_{tf} = 1 + 2\sqrt{\frac{t_0}{\rho}} \dots\dots\dots (i)$$

$$K_{tt} = \frac{1}{N} \frac{3}{4} \left(\sqrt{\frac{d}{2\rho} + 1} + 1 \right) \times \left\{ 3 \frac{d}{2\rho} - (1 - 2\nu) \sqrt{\frac{d}{2\rho} + 1} + 4 + \nu \right\} \dots\dots (ii)$$

$$N = 3 \left(\frac{d}{2\rho} + 1 \right) + (1 + 4\nu) \sqrt{\frac{d}{2\rho} + 1} + (1 + \nu) \left/ \left(1 + \sqrt{\frac{d}{2\rho} + 1} \right) \right. \dots\dots\dots (iii)$$

ここで、

t_0 : 切欠き深さ, ρ : 切欠き半径, d : 最小断面の直径である。

付表 1 U形切欠きの応力集中係数
($d/\rho=8$ の場合)

$2\rho/D$	$2t_0/D$	著者ら	菊川ら	ノイバー
0.125	0.5	1.888	1.896	1.82
0.15	0.4	1.886	1.898	1.81
0.167	0.333	1.884	1.891	1.81
0.1875	0.25	1.874	1.896	1.79
0.2	0.2	1.858	1.860	1.77
0.22375	0.105	1.772	1.779	1.72

$$K_t = \frac{(K_{tf}-1)(K_{tt}-1)}{\sqrt{(K_{tf}-1)^2 + (K_{tt}-1)^2}} + 1 \quad \dots\dots\dots(\text{iv})$$

したがって、このようにして求めた応力集中係数が具体的にどのような切欠きの形状に対応するかは、かならずしも明確ではないと思う。

論文中におけるノイバー三角則の誤差の議論は、このようにして求めた場合の値に対するもので、たとえば浅い切欠きの解として半無限板縁のV形切欠きの解⁽⁹⁾を用いればノイバーの値の精度は多少は改善され

るものと思う。

(2) 直接比較できる例がないので追加計算した結果を付表1に示す。付表1は開き角 $\omega=0^\circ$ のU形切欠きにおいて、 d/ρ を一定に保ち、切欠き深さ t_0 を変えて計算した結果を、菊川らの実験値、ノイバーの三角則による値とともに示したものである。菊川らの値は著者らの値と1%程度以内で良く一致していることがわかる。

(3) 1区間の $1/82$ を ε_0 とすると、注目点を含んだ $2\varepsilon_0$ の区間については数値積分を行わず、文献(8)の631ページに示すような極限值をとる操作を行い、直接積分した式を用いることによって特異性を避けている。

注目点の前後の $40\varepsilon_0$ の区間については数値積分を行っているが、その際シンプソン則が利用できるように数値積分の分割数を奇数の2倍(41×2)で与えている。